Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański
Prof. dr hab. Zbigniew Szafraniec

Gdańsk, 10 grudnia 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Zwierzyńskiego

Nierówności izoperymetryczne i geometria kaustyki Wignera.

Promotor - dr hab. inż. Wojciech Domitrz, prof. PW

Rozprawa jest poświęcona badaniu geometrycznych własności zbiorów afinicznie λ-równoodległych stowarzyszonych z gładkimi krzywymi płaskimi. Składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii.

Podstawowym obiektem badań są tu krzywe gładkie na płaszczyźnie sparametryzowane przez C^∞-odwzorowania z odcinka lub okręgu do $\mathbf{R}^2$. Z taką krzywą można powiązać w naturalny sposób kolejne krzywe. Klasyczna geometria różniczkowa dostarcza wielu przykładów takich krzywych. Jednym z nich jest intensywnie od dawna badana kaustyka Wignera, którą można uogólnić do pojęcia krzywej będącej zbiorem punktów λ-równoodległych. Innym przykładem jest wprowadzona przez Stanisława Janeczko krzywa będąca zbiorem środów symetrii, a kolejnym krzywa złożona z punktów "zbioru mierzącego stałą szerokość".

Krzywe te są często osobliwe. Głównym celem autora była charakteryzacja osobliwości pojawiających się na tych krzywych oraz ich punktów przegięcia, jak również relacji pomiędzy tymi punktami. Kolejnym tematem było badanie nierówności izoperymetrycznych opisujących związki pomiędzy długościami i polami powierzchni stowarzyszonymi z tymi krzywymi. Ważnym celem autora było stworzenie takich metod które pozwalają badać te krzywe w przypadku gdy krzywa wyjściowa nie jest owalem.

W Rozdziale 1 autor bada geometryczne własności zbioru $E_\lambda(M)$ punktów λ-równoodległych stowarzyszonych z krzywą M oraz formułuje pewne twierdzenia mające uzasadnić istnienie na $E_\lambda(M)$ punktów osobliwych. Mam pewne zastrzeżenia do tych wyników, które omówię w dalszej części recenzji.

W Rozdziale 2 autor wprowadził oryginalne, użyteczne pojęcie *schematu sklejania* zbioru $E_\lambda(M)$. Używając pomysłowych i kombinatorycznie nietrywialnych argumentów użył tego pojęcia do charakteryzacji własności zbioru punktów osobliwych i punktów przegięcia na gałęziach krzywej $E_\lambda(M)$. Szczególnie ciekawe wydały mi się przedstawione tu twierdzenia dotyczące tych gałęzi, które mają początek i koniec na krzywej M.

W Rozdziale 3 badane są krzywe które mogą być sparametryzowane przez swoje odwzorowanie Gaussa, na przykład owale lub tzw "jeże" (ang. "hedgehogs"). W takim przypadku odwzorowanie odwrotne pozwala zdefiniować *funkcję podpierającą Minkowskiego* $p(\theta)$, która również pozwala opisać krzywą. Rozwinięcie funkcji $p(\theta)$ w szereg Fouriera umożliwia dowodzenie ważnych nierówności izoperymetrycznych. Autor użył tych metod żeby badać owale o stałej szerokości, krzywe złożone z punk-

Szaf

tów "zbioru mierzącego stałą szerokość" (ang. "Constant Width Measure Set") oraz krzywe Wignera.

W Rozdziale 4 autor łączy techniki wprowadzone w dwóch wcześniejszych rozdziałach żeby opisać punkty osobliwe, punkty przegięcia oraz inne geometryczne własności krzywych $E_\lambda(R_m)$ stowarzyszonych z generycznymi *rozetami*. (*Rozety* to zamknięte lokalnie wypukłe krzywe o skończonej liczbie rotacji.)

Rozdział 5 jest podsumowaniem rozprawy.

Rozprawa została napisana w zwięzły sposób, i jest raczej skierowana do czytelnika który jest już wprowadzony w podobną tematykę. Czasami utrudniało mi to lekturę, zmuszając do samodzielnego uzupełniania niektórych fragmentów dowodów. W kilku przypadkach niezbędna była rozmowa z autorem.

W pracy znalazłem pewną liczbę łatwych do zauważenia i poprawienia literówek. Poinformowałem już o nich autora osobiście. Inne "poważniejsze" usterki to:

- Brak jest definicji pojawiającego się wielokrotnie pojęcia punktu osobliwego "typu ostrze". Jest to istotne, bo niektóre przedstawione w rozprawie rysunki mogą prowadzić do nieporozumień.
- Na str. 34 użyto nieprawdziwego argumentu, że gdy pętla nie jest ani wypukła, ani niewypukła, to jest owalem. Na szczeście autor wiedział jak to zastąpić innym prawidłowym argumentem.
- Stwierdzenie 2.2.1 (i) na str. 55 jest nieprecyzyjne. Trzeba tam napisać, że istnieje co najmniej n gałęzi, z których dokładnie n łączy punkty przegięcia na krzywej.
- w Lemacie 2.3.9 (str. 64) potrzebne jest jakieś założenie, które zagwarantuje, że liczba punktów przegięcia na krzywej jest skończona.
- Dowód Lematu 3.1.7 (str. 72) nie wymaga użycia tak zaawansowanego pojęcia jak "punkt Steinera". Wystarczą dużo prostsze argumenty.
- W dowodzie Lematu 3.3.6 za wcześnie napisano, że funkcja $p_{CWMS(M)}(\theta)$ jest funkcją podpierającą zbioru $CWMS(M)$. Wynika to dopiero z dalszej części tego dowodu.
- Nierówność (3.4.2) (str. 88) powinna mieć postać: $\Phi(K) \geq cd(K, N)^\alpha$.

Mam też dwa dużo poważniejsze zastrzeżenia do pracy:

- Autor używa argumentu, że aby sprawdzić czy punkt należący do krzywej jest osobliwy, wystarczy sprawdzić że punkt ten jest punktem krytycznym pewnej naturalnej parametryzacji krzywej. Warunek ten jest oczywiście konieczny, ale niestety nie jest wystarczający. Autor używa wielokrotnie tego argumentu jako warunku wystarczającego (str.18, str.19, str.26, str.78, str.83, str.109).
- Autor wielokrotnie formułuje zdania mówiące, że jeżeli krzywa M jest **generyczna** to punkty osobliwe stowarzyszonych z nią takich krzywych jak kaustyka Wignera, $E_\lambda(M)$, $CWMS(M)$ są **ostrzami**. Uważam, że należy sformułować wprost warunki gwarantujące "generyczność" w tych przypadkach.

(Autor sformułował pewne warunki w tezie Stwierdzenia 2.0.3, dobrze byłoby wyjaśnić czy są to już wszystkie niezbędne warunki.)

Na dorobek autora składa się jeden samodzielny artykuł, który ukazał się w *J. Math. Anal. Appl.*. Pięć artykułów, w tym dwa wspólne z Promotorem oraz jeden wspólny z Promotorem i M. C. Romero Fuster jest obecnie dostępnych na `arXiv`.

Praca, jak i pozostały dorobek kandydata, świadczy o dobrej znajomości trudnych technik stosowanych w dziedzinie rozprawy. Uzyskane przez niego wyniki są oryginalnym, wartościowym wkładem w badania poświęcone geometrycznym własnościom kaustyk stowarzyszonych z krzywymi płaskimi. Wyniki te mogą wystarczyć do nadania kandydatowi stopnia doktora. Uważam jednak, że niezbędne jest wyjaśnienie zagadnień do których miałem zastrzeżenia. Dlatego wnioskuję o uzupełnienie lub poprawę rozprawy doktorskiej.

Zbigniew Szafraniec

Zbigniew Szafraniec